# Spelen met oneindigheid

## Verrassende figuren en patronen

Hans Zantema

NOORDBOEK

Coverontwerp: Bart van der Tooren
Boekontwerp en illustraties: Hans Zantema
ISBN 978 94 6471 021 2
NUR 910|918



Noordboek is onderdeel van
20 leafdesdichten en in liet fan wanhoop bv
www.noordboek.nl

# Inhoudsopgave

**Hoofdstuk 1**

# Waar gaat dit boek over?

Wat is het grootste getal? Hoeveel getallen zijn er? Kunnen we al die getallen in een computer opslaan? Getallen die we nooit tegen zullen komen, bestaan die eigenlijk wel?

Allemaal vragen die we ons kunnen stellen. Om maar eens met de eerste vraag te beginnen: bij elk getal kunnen we wel een groter getal maken, simpelweg door er een bij op te tellen. Dus het grootste getal bestaat niet. En daarmee hebben we ook al het antwoord op de tweede vraag te pakken: het aantal getallen dat er bestaat is groter dan elk getal dat je je maar voor kunt stellen.

## Oneindig veel

Er zit niets anders op dan om dat aantal getallen *oneindig* te noemen: een hoeveelheid die groter is dan elk eindig getal. Maar wat is dat precies: oneindig?

Alles wat we in een computer opslaan wordt uiteindelijk opgeslagen als een rij nullen en enen. Dat geldt voor alle documenten, ook dit boek. Maar ook voor alle plaatjes, foto's, muziekbestanden, filmpjes. In de loop der jaren is het beschikbare geheugen van een computer er flink op vooruit gegaan. Terwijl dat veertig jaar geleden nog ondenkbaar was, kun je nu probleemloos een complete film in hoge resolutie en hoge geluidskwaliteit op een computer opslaan. Maar hoeveel verbeteringen we in die richting nog tegemoet zullen zien, het blijft wel altijd eindig. Vroeger waren het megabytes, nu veelal gigabytes, en het totale geheugen loopt in de terabytes, maar het blijft altijd eindig. Wat voor slimme technieken er ook ontwikkeld worden, meer dan alle atomen in het heelal zullen nooit beschikbaar komen om bestanden in op te slaan. En ook al weten we niet precies hoeveel atomen er in het heelal zijn, het is erg onwaarschijnlijk dat het er oneindig veel zijn. En zelfs al zouden het er oneindig veel zijn, dan is daar vanwege de lichtsnelheid toch maar een eindig deel van in redelijke tijd bereikbaar.

Een bestand dat alle natuurlijke getallen bevat:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \ldots$$

en dan onbeperkt doorgaat zodat elk natuurlijk getal erin voorkomt, zal oneindig groot zijn. Dit zul je dus nooit kunnen opslaan, niet op alle huidige computers van de wereld samen, en ook niet op alle toekomstige computers van de wereld.

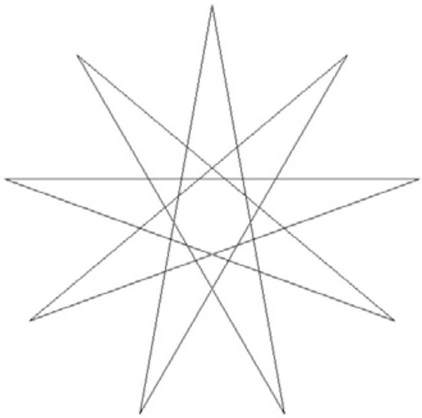
Dit begrip oneindigheid heeft iets intrigerends en zal dan ook de rode draad zijn in dit boek. We zullen verschillende soorten getallen bekijken, waarvan er allemaal oneindig veel zijn, en we zullen zien dat de ene soort oneindigheid groter is dan de andere. We zullen daar niet alleen redeneringen voor geven, maar ook stilstaan bij hoe die redeneringen eruit zien, en wat de kracht daarvan is. Dit kun je zien als een *blik op oneindig*, maar zeker niet zoals ze over de mindset bij duursporten wel eens zeggen: *verstand op nul en blik op oneindig*: wij willen juist wel het verstand aan het werk zetten en nadenken over het hoe en waarom.

## Oneindige rijen en stapfiguren

Behalve getallen zullen we ook oneindige rijen bekijken. In hun simpelste vorm bestaan die alleen uit nullen en enen, als de logische manier om oneindige dingen op te slaan, net als eindige rijen van nullen en enen de logische manier zijn om eindige dingen op een computer op te slaan.

Bijzondere aandacht zullen we hebben voor een heel eenvoudige manier om zulke oneindige rijen zichtbaar te maken in een plaatje: met *stapfiguren*. Dat komt later uitgebreid aan de orde, maar om alvast een gevoel te krijgen waar het naar toe gaat hier alvast een impressie. Bij 0 en 1 horen elk een hoek. Een robot, om historische redenen vaak schildpad genoemd, leest de rij vanaf het begin en gaat wandelen vanuit een bepaald punt en looprichting. Eerst leest hij het eerste symbool uit de rij: als dit een 0 is draait hij zijn looprichting over de hoek die hoort bij 0, en als het een 1 is draait hij zijn looprichting over de hoek die hoort bij 1. En dan doet hij een *stap* ter lengte van een vaste eenheid. En dit herhaalt hij: hij leest het volgende symbool uit de rij, draait volgens de hoek die daarbij hoort en doet weer een stap. En dit doet hij oneindig vaak. De stapfiguur is dan de route die hij heeft afgelegd. Verderop in het boek gaan we dat in detail beschrijven, nu beginnen we met een eenvoudig voorbeeld om het idee te illustreren.

Laten we kijken naar de rij die alleen uit nullen bestaat, en waarbij de hoek horend bij 0 gelijk is aan 160 graden. De hoek horend bij 1 doet er dan niet toe, want die komt toch niet in de rij voor. De stapfiguur krijg je dan door oneindig lang het doen van een eenheidsstap af te wisselen met het draaien van de richting over 160 graden. Dat betekent dat elke volgende stap maakt een scherpe hoek van 20 graden maakt met de vorige stap. Na negen stappen heeft hij dan de volgende figuur doorlopen:



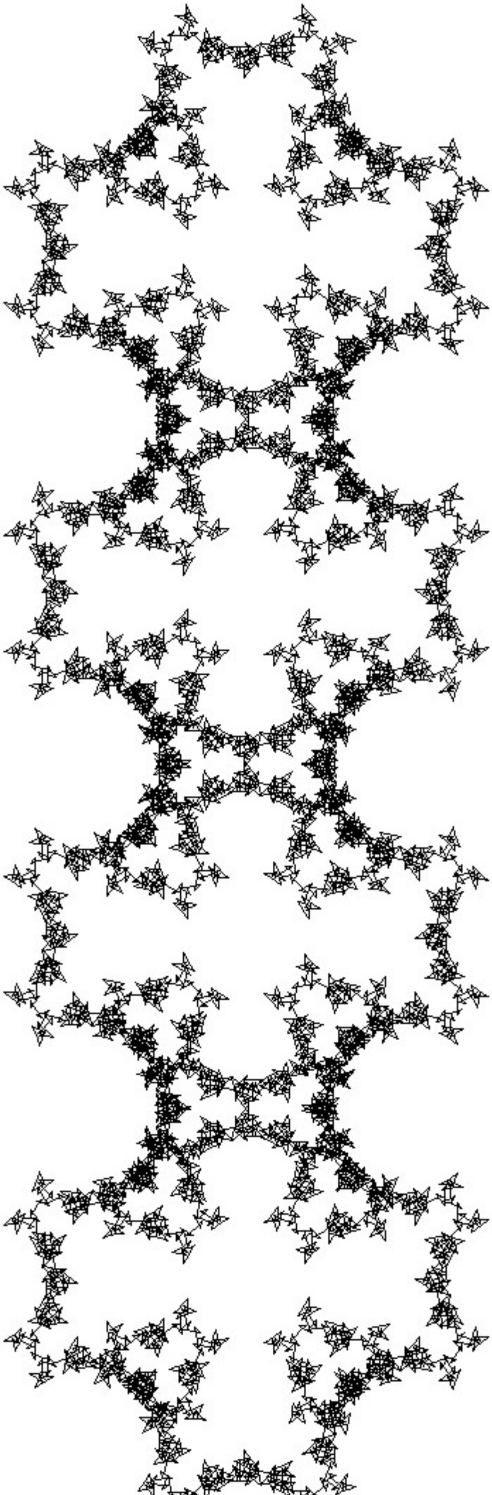
dat is dus het begin van de stapfiguur. Na die negen stappen is hij precies terug waar hij begon, met dezelfde richting, dus daarna worden alleen maar stappen herhaald die al eerder gedaan zijn, en bovenstaande negenpuntige ster is dus de stapfiguur horende bij deze oneindige rij.

## Morfische rijen en symmetrie

Dit is nog niet zo ingewikkeld en verrassend, maar een stuk spannender is het volgende. Beschouw de rij

$$\mathbf{t} = t_0 t_1 t_2 \cdots = 0110100110010110 \cdots$$

die gedefinieerd is door $t_0 = 0$, $t_{2i} = t_i$ en $t_{2i+1} = 1 - t_i$ voor elke $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Deze rij heet de Thue–Morserij . Deze zullen we later uitgebreid bespreken; laat je nu vooral niet door deze formule afschrikken. We laten nu alleen de stapfiguur zien die we voor deze rij krijgen als de hoek voor 0 gelijk is aan $-146,25$ graden en de hoek voor 1 gelijk is aan $4,74609375$ graden.



Hier hebben we wel de stapgrootte terug moeten brengen tot ongeveer een millimeter om het resultaat op de pagina te laten passen. Ook hier geldt dat na een aantal stappen (in dit geval geen 9 maar 16384) de schildpad terug is waar hij begon, in dezelfde richting, en alles wat daarna komt alleen maar bestaat uit precies dezelfde stappen die al eerder gedaan zijn, ook al is het nog resterende deel van de rij helemaal niet gelijk aan de hele rij. Waarom dat het geval is bij precies deze hoeken, en hoe we op het idee zijn gekomen om deze hoeken te kiezen, is iets wat we later helemaal uit zullen pluizen als resultaat van een zorgvuldige analyse. Dat het plaatje allerlei symmetrie heeft is daarmee ook nog wel te beredeneren, maar hoe het plaatje er dan uiteindelijk uitziet als resultaat van een computerprogramma van slechts een paar regels is een verrassing. Zoals gezegd: later veel meer hierover; op dit moment wil ik alleen nog kwijt dat als we die hoeken door zomaar wat andere hoeken vervangen, er bijna altijd een compleet chaotisch plaatje uitkomt waarin je helemaal niet na een aantal stappen weer terug bij af bent.

De Thue–Morserij die we zonet zagen heeft nog een bijzondere eigenschap. Als we in deze rij elke 0 door 01 vervangen en elke 1 door 10, dan is het resultaat weer precies de Thue–Morse rij zelf. En de Thue–Morserij is de enige oneindige rij die met een 0 begint en deze eigenschap heeft. Dit idee kunnen we algemener maken: als we een eindig rijtje $f(0)$ van nullen en enen kiezen dat met 0 begint, en een eindig rijtje $f(1)$ van nullen en enen kiezen, dan kunnen we een oneindige rij $f^{\infty}(0)$ maken die met 0 begint en de eigenschap heeft dat als je in die oneindige rij elke 0 door $f(0)$ vervangt en elke 1 door $f(1)$, je weer op precies diezelfde rij uitkomt. Zulke rijen heten *morfisch* . De Thue–Morserij is dus de morfische rij die je krijgt bij $f(0) = 01$ en $f(1) = 10$. We hebben al een voorbeeld gezien van een stapfiguur van de Thue–Morserij die na eindig veel stappen terug is bij het startpunt, en voor de rest alleen maar lijnstukjes overtekent die al eerder getekend zijn. Hiermee is de hele stapfiguur eindig. Zulke eindige stapfiguren zullen we ook zien bij andere morfische rijen, en we krijgen dan vaak mooie symmetrische patronen. Het hoe en wat en waarom komt later uitgebreid aan de orde, hier beperken we ons tot het volgende voorbeeld met een 17-voudige symmetrie: